

15. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, k, n, m \in Z$ б) $-\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}$

16. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану основания SE в отношении 5:1, считая от точки S.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

17. Решите неравенство:

$$(\log_2^2 x - 2 \log_2 x)^2 < 11 \log_2^2 x - 22 \log_2 x - 24$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); (8; 16)$

18. Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырехугольника ABCD, причем B и C – вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырехугольника ABCD пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N – точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырехугольника ABCD, если известно, что BM:MC=1:3, а площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Ответ: 96.

19. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Ответ: $p = 10$

20. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + x - 2 = |x^2 + x - 2| \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений

Ответ: $a = 0; 2 < a < -1 + \sqrt{10}$

21. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600000 рублей (размер премии каждого сотрудника – целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Ответ: а) да; б) нет; в) 26