

Профильный уровень.

1

Поезд отправился в Москву из Санкт-Петербурга в 23 часа 50 минут (время московское) и прибыл в Москву в 7 часов 50 минут следующих суток. Сколько часов поезд находился в пути?

Решение.

Через 10 минут после отправления наступят следующие сутки. Осталось прибавить их ко времени прибытия. 7 часов 50 минут + 10 минут = 7 часов 60 минут = 8 часов.

Ответ:

8

2

На рисунке точками показана средняя температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 г. По горизонтали указаны номера месяцев, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией.

Сколько месяцев средняя температура была больше 18 градусов Цельсия?

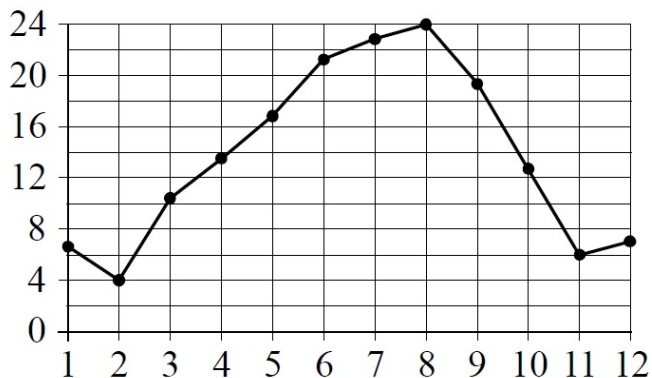
Решение.

Определим цену деления вертикальной оси, оси температур. Возьмем две подписанные отметки, найдем модуль их разности и разделим его на число делений между этими двумя отметками.

Прикладываем линейку горизонтально к отметке 18 градусов (она между 20 и 16) и считаем количество жирных точек выше линейки. Таких точек ровно 4.

Ответ:

4



3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см x 1 см изображен треугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в см².

Решение.

Проблем вообще нет никаких – удобная вертикальная высота равна 2, удобная горизонтальная сторона равна 6.

$$S = \frac{1}{2}ah = 6.$$

Ответ:



6																				
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Решение.

Искомая вероятность есть отношение "хороших" билетов ко всем билетам.

$$\frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

Ответ:

0	,	0	8																	
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

5

Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$.

Решение.

$$3^{x-5} = 81, \quad 3^{x-5} = 9^2, \quad 3^{x-5} = (3^2)^2, \quad 3^{x-5} = 3^4, \quad x - 5 = 4, \quad x = 9.$$

Ответ:

9																				
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

6

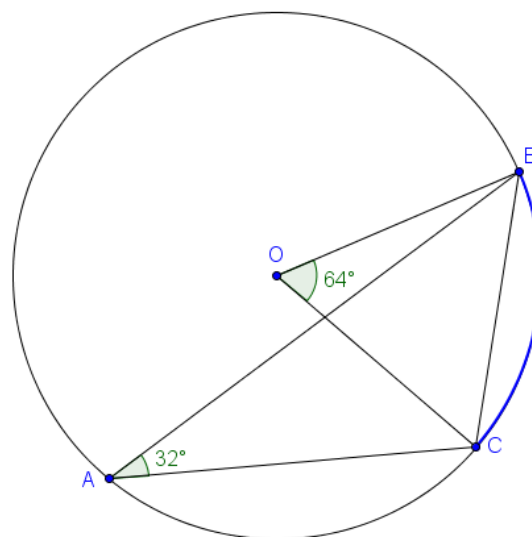
Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Угол BAC равен 32° . Найдите угол BOC . Ответ дайте в градусах.

Решение.

Центральный угол в двое больше вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Рисунок к задаче дано не было, но я его восстановлю для ясности.

Ответ:

6	4																			
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



7

На рисунке изображен график дифференцируемой функции $y = f(x)$.

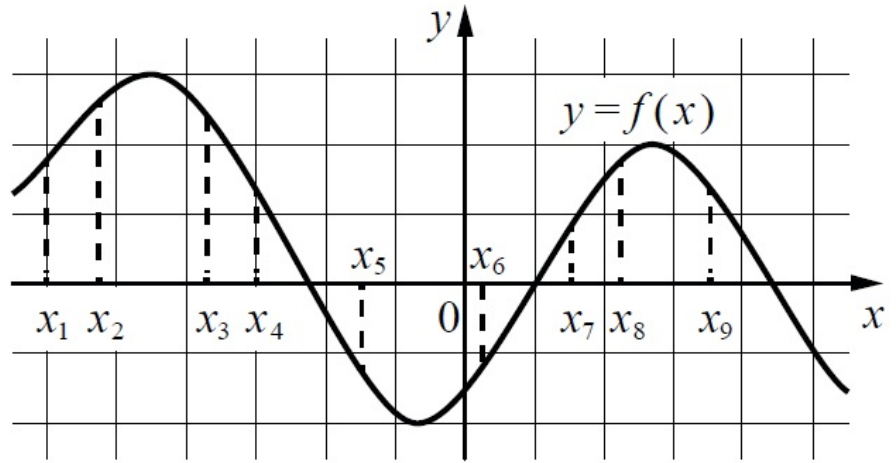
Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $y = f(x)$ отрицательна. В ответ укажите количество этих точек.

Решение.

Производная отрицательна на промежутках убывания функции и положительна на промежутках её возрастания и, наконец, равна нулю в особых точках, в которых функция меняет характер своего изменения.

Графически убывание характеризуется спуском линии вниз с увеличением x , возрастание – ростом линии вверх с увеличением x , смена характера изменения функции есть либо горка, либо впадинка.

Основываясь лишь на таких простых замечаниях, нетрудно видеть, что нужные нам точки это x_3 , x_4 , x_5 и x_9 – всего 4.



Ответ:

4																			
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

8

В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ выразите в см.

Решение.

Формула объема цилиндра

$$V = S \cdot h = \frac{\pi D^2}{4} h,$$

где S – площадь основания, D – диаметр основания, h – высота цилиндра. У нас

$$V_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} h_1, \quad V_2 = \frac{\pi (2D_1)^2}{4} h_2 = \pi D_1 h_2, \quad V_1 = V_2 \Rightarrow h_2 = \frac{1}{4} h_1 = 4.$$

Ответ:

4																			
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

9

Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Решение.

$$\pi < \alpha < 2\pi \Rightarrow -1 < \sin \alpha < 0, \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = -0,8.$$

Ответ:

-	0	,	8																
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

10

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приемник регистрирует частоту сигнала, отраженного от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частота связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде; f_0 – частота испускаемого сигнала (в МГц); f – частота отраженного сигнала (в МГц). Найдите частоту отраженного сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Решение.

Никакие единицы измерения не меняем, как бы нам того не хотелось. Спокойно выражаем нужную нам букву из формулы.

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}, \quad vf + vf_0 = cf - cf_0, \quad f = f_0 \cdot \frac{c + v}{c - v}.$$

$$f = 749 \cdot \frac{1500 + 2}{1500 - 2} = 749 \cdot \frac{1502}{1498} = \frac{1502}{2} = 751.$$

Ответ:

7	5	1																	
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

11

Весной катер идет против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идет против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Решение.

Обозначим искомую скорость x . Введем также скорость катера y , считая её постоянной и весной, и летом.

Тогда скорость движения по течению весной будет $y + x$, против течения $y - x$. Первое уравнение, согласно условию задачи, выглядит так:

$$\frac{y + x}{y - x} = 1\frac{2}{3}, \quad 3y + 3x = 5y - 5x, \quad y = 4x.$$

По условию, скорость течения реки летом замедляется на 1, тогда скорость движения по течению летом будет $y + (x - 1)$, против течения $y - (x - 1)$. Используя полученное равенство и условие, запишем второе уравнение:

$$\frac{y + x - 1}{y - (x - 1)} = 1\frac{1}{2}, \quad \frac{4x + x - 1}{4x - x + 1} = \frac{3}{2}, \quad 10x - 2 = 9x + 3, \quad x = 5.$$

Ответ:

5																			
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

12

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 4)^2 + 2x + 7$.

Решение.

Честно считаем производную, приравниваем её к нулю, находим *стационарные точки* – корни уравнения, среди этих точек ищем точки максимума – проходя через них производная меняет знак с плюса на минус. Отметим, что $x = -4$ не является допустимым значением аргумента.

$$\begin{aligned}y' &= (\ln(x + 4)^2 + 2x + 7)' = \frac{1}{(x + 4)^2} \cdot [(x + 4)^2]' + 2 = \frac{2(x + 4)}{(x + 4)^2} + 2 = \\ &= \frac{2}{x + 4} + 2 = \frac{2x + 10}{x + 4}.\end{aligned}$$

Единственный корень уравнения $y' = 0$ это $x = -5$.

Ответ:

-	5																		
---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Подробные решения задач с 13 по 19 есть в официальных документах.

Комментарий.

Автор – Эдуард Джендубаев – желает каждому случайному читателю всего самого наилучшего и обязательно принять участие в математических олимпиадах. Конкретно в Объединенной межвузовской математической олимпиаде и в олимпиаде "Покори Воробьевы горы!" по математике.

Решение заданий демоверсии 2016 базового уровня: 4ege.ru/matematika/51586-reshenie-demoversiy-2016-po-matematike.html

Другие пособия автора:

- [Решение задач по математике из открытого банка ФИПИ.](#)
- [Решение задач ОММО.](#)
- [Решение экономических задач](#) (задание №17).
- [Подготовка к олимпиадам по математике.](#)