

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

3. Решите неравенство $\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x$.

4. Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD .

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC=1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM , DM , BN и CN , равна 18.

5. Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + x + 7)$.

Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении r строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

2. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

3. Решите неравенство $\frac{1}{5^x + 31} \leq \frac{4}{5^{x+1} - 1}$.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На катете AC взята точка M . Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N .

а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BOMN$, если $CN = 4$ и $AM : MC = 1 : 3$.

5. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

Вариант 3

1. а) Решите уравнение

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

2. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

3. Решите неравенство $\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$.

4. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P , причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD , где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD , если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 5$, а $BC = 5\sqrt{2}$.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

Вариант 4

1. а) Решите уравнение

$$6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6,

а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

3. Решите неравенство $\frac{2^x}{2^x-3} + \frac{2^x+1}{2^x-2} + \frac{5}{4^x-5\cdot 2^x+6} \leq 0$.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке K , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C . Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность

в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L .

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.

б) Найдите MN , если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

Вариант 1

- 1) а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{3\pi}{2};$
 $-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$
- 2) б) $5\sqrt{3}$ 3) $(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}); (8; 32).$ 4) б) 96
- 5) $p = 9$

Вариант 2

- 1) а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}.$
- 2) б) 2,4 3) $(-1; 3].$ 4) б) 7 5) 0,8

млн рублей

Вариант 3

- 1) а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{13\pi}{6}.$
- 2) б) 30° 3) $(-\infty; \log_7 4); (1; \log_7 9]$ 4) б) $12,5\sqrt{3}$ 5) 20,25

млн. рублей.

Вариант 4

- 1). а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{14\pi}{3}.$
- 2) б) $8 + 2\sqrt{2}$ 3) $0; (1; \log_2 3)$ 4) б) $115/6$ 5)
- 20.